

DOI: 10.7652/xjtuxb201403005

黏弹阻尼对一维杆状声子晶体 能带结构频移的影响

张思文^{1,2}, 吴九汇^{1,2}, 刘彰宜^{1,2}

(1. 西安交通大学机械工程学院, 710049, 西安;
2. 西安交通大学机械结构强度与振动国家重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 为了明确黏弹阻尼对声子晶体能带结构的影响,根据黏弹材料的标准线性固体模型,利用平面波展开法的迭代算法对一维黏弹材料声子晶体的能带结构进行了理论计算和对比分析。与弹性模量为常数的完全弹性材料相比,黏弹材料由于其复模量的频率相关性,储能模量和损耗模量对声子晶体的能带结构都有重要影响,特别是损耗模量对声子晶体能带结构的影响在阻尼峰值附近的频率范围不容忽视。位于此频率范围的能带被调向更高频而其他范围的能带基本不变,从而使能带下方带隙增宽而上方带隙变窄。损耗模量对能带结构的这一特定调节作用为黏弹性阻尼材料应用于声子晶体提供了一定的理论基础,也为获得宽频带隙提供了一种新的方法。

关键词: 声子晶体;能带结构;黏弹材料;阻尼;带隙特性

中图分类号: TB535; O328; O345 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2014)03-0022-06

Damping-Induced Frequency Shifts in Band Structures of One-Dimensional Viscoelastic Phononic Crystal Rods

ZHANG Siwen^{1,2}, WU Jiuhui^{1,2}, LIU Zhangyi^{1,2}

(1. School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 71009, China; 2. State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To understand the influence of damping on the band structures of phononic crystals (PCs), the vibration band structures of one-dimensional viscoelastic PCs are investigated and analyzed theoretically by iteration method for plane wave expansion (PWE), based on standard linear solid (SLS) model of viscoelastic materials. Compared with the case of constant modulus, the storage modulus and the loss modulus exert clearer influence on the band structures and the gap bandwidth due to the frequency dependence of the complex modulus. In particular, the influence of loss modulus cannot be ignored in the frequency range around the damping peak, where the frequency bands are shifted to the higher range, but the other bands almost remain unchanged, thus the gaps below and above the bands are widened and narrowed respectively. These results provide theoretical basis to research viscoelastic phononic crystals and an effective way to obtain broad band gaps for phononic crystals.

Keywords: phononic crystal; band structure; viscoelastic material; damping; band gap

声子晶体是一种弹性散射体周期排列形成的新型人工周期性功能材料,由于其具有优越的控制弹

性波传播的能力,受到了广泛的关注和研究,并在减振降噪等方面具有潜在的应用前景。Rayleigh 早在 1887 年就已指出,连续周期结构中存在无波传播模式的频率范围。弹性波或声波在声子晶体结构中传播时,受到内部周期结构的作用,一些频率范围的弹性波无法通过结构向前传播,称为禁带或带隙^[1]。直到 20 世纪 90 年代,对于声子晶体才开始有比较广泛的研究^[2-5]。对于声子晶体的初期研究主要侧重于带隙的产生机理和计算方法,并分析影响带隙频率范围的主要因素(包括材料、晶格常数、填充率等)^[6-8]。计算声子晶体能带结构(即色散关系曲线)的主要方法有传递矩阵法、平面波展开法^[6]、时域有限差分法^[7]、多重散射法^[8]、集中质量法及有限元法等。组成声子晶体结构的可以是固体,也可以是流体。平面波展开法是最常用的算法之一,在计算固-固型、流-流型声子晶体的能带结构时相当成功,但在计算组元材料参数差异较大的固-流型声子晶体时存在一定的困难,收敛较慢^[1]。前期对于声子晶体的研究,很少考虑到组元材料的阻尼(如流体的黏滞阻尼、固体的黏弹阻尼)对能带结构和带隙特性的影响。2000 年前后,一些学者研究了流体的黏滞阻尼对固-流型声子晶体带隙特性的影响,指出:当声子晶体结构的特征长度与流体的黏性穿透深度相当时,流体黏滞阻尼对带隙有重大影响^[9-10]。

黏弹材料是同时具有流体黏性和固体弹性的材料,如塑料、橡胶等聚合物,陶瓷,混凝土等^[11]。在弹性材料中,弹性模量为实数且与频率无关,而对于黏弹性材料,弹性模量不仅为复数,而且是频率的函数。将黏弹材料应用于声子晶体周期结构,使得能带结构的计算复杂化,但其对于带隙特性的调节作用吸引了不少学者的研究^[12-22]。在处理黏弹材料时,一些学者将其视为具有特定阻尼的弹性材料而没有考虑阻尼和弹性常数随频率的变化^[12-14];一些学者用复数来表示弹性模量,并认为其虚部(即损耗模量)只表征为对能量的耗散,而决定弹性波传播行为(如色散关系)的是其实部(即储能模量),因此只考虑储能模量对声子晶体色散关系的影响^[15-19]。王刚、温激鸿等人还对比了理论计算和实验测试的结果,认为黏弹阻尼不改变结构的色散关系,只表现为对高频能量的耗散作用,从而增大了带隙的宽度^[15-16]。Zhao 等人给出了黏弹材料的复模量模型,但在计算由其组成的声子晶体的色散关系时,仍然只考虑了储能模量的影响^[18-19]。上述研究中认为损耗模量只表现为对能量的耗散而对色散关系没有影

响是缺乏理论依据的,也没有文献对此进行过讨论,因此其合理性还有待商榷。Merheb 等人同时考虑了材料黏弹性对声子晶体结构色散关系和耗散的影响^[20-22]。然而,他们虽然指出了黏弹阻尼对声子晶体能带结构有重要影响作用,但都没有深入讨论在整个频率范围,特别是跨过阻尼峰前后,损耗模量对声子晶体能带结构频移的贡献。

本文根据标准线性固体模型,研究了材料黏弹性对声子晶体能带结构的影响,分析和讨论了损耗模量对能带结构的频移影响。利用平面波展开法的迭代算法对含有黏弹材料的一维声子晶体能带结构进行了理论计算,对比分析了将弹性模量视为常数、只考虑储能模量、同时考虑储能模量和损耗模量这 3 种情况下的带隙特性,发现了损耗模量对能带的特定调节作用,并进一步讨论和分析了这一特定调节作用的机理。

1 黏弹性材料模型及其频率相关性

弹性波在黏弹性介质中传播时,应力和应变响应之间存在一定的相位差,表示应力-应变关系的弹性模量可以表示为复模量形式^[11]

$$E^*(i\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega) = E'(\omega)(1 + i\beta(\omega)) \quad (1)$$

式中: $E'(\omega)$ 为储能模量,它与存储在材料中的弹性势能有关; $E''(\omega)$ 为损耗模量,它与耗散在材料中的能量有关;损耗因子

$$\beta(\omega) = \tan\delta = \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)} \quad (2)$$

其中 δ 为损耗角,也是应变滞后于应力的相位差。

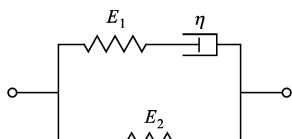
对于黏弹材料,储能模量、损耗模量及损耗因子都是频率的函数。它们并不是相互独立的,而是满足 Kramers-Kronig 关系^[23]。标准线性固体模型(如图 1a 所示)是常用于描述黏弹材料力学特性并满足 Kramers-Kronig 关系的经典模型,其复模量表示为

$$E'(\omega) = E_2 + E_1 \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (3)$$

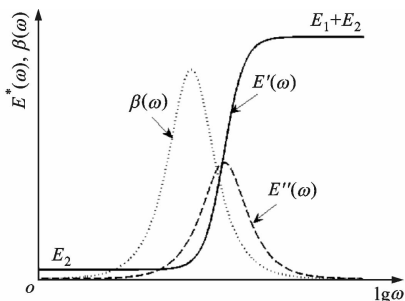
$$E''(\omega) = E_1 \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (4)$$

式中: E_2 、 $E_1 + E_2$ 分别为极限频率下的模量值; τ 为松弛时间, $\tau = \eta/E_1$, η 为黏性元件的黏性系数,它们都由具体材料确定。将复模量及损耗因子表示在同一坐标中,如图 1b 所示。

对比图 1a 中的材料模型和图 1b 中复模量随频率的变化曲线可知,由于黏性元件所承受的力与应



(a) 标准线性固体模型



(b) 复模量对频率的依赖关系

图1 标准线性固体模型及其频率相关性

变速率密切相关,模型的两个分支之间的耦合作用也随频率改变,使得该模型具有如下频率特性:①在低频范围,由于应变速率极小,黏性元件基本上不产生阻力,使得由黏性元件和弹性元件 E_1 组成的分支被隔离,此时相当于完全弹性材料,弹性模量为 E_2 ,并且基本不随频率变化;②当频率增大时,应变速率随之增大,黏性元件承受的作用力也增大,一方面 E_1 不断并入模型中,使储能模量增大,另一方面能量也不断损耗在黏性元件中,损耗模量也随之增大;③在高频范围,应变速率很大,黏性元件跟不上应变的变化, E_1 完全并入模型中,储能模量也趋于一个较大的恒定值,而损耗模量逐渐减小为0。

损耗模量随着频率的升高先增大后减小,在一定频率范围内达到最大值,称为黏弹材料的阻尼峰,如图1b所示。材料的这些频率特性将直接影响由其组成的声子晶体的能带结构及其带隙特性。

2 一维声子晶体能带结构的计算方法

在标准线性固体模型的基础上,利用平面波展开法的迭代算法计算并分析黏弹阻尼对一维声子晶体能带结构的影响。图2为A、B 2种材料组元交替排列形成的一维杆状声子晶体结构的示意图,其中晶格常数 $a = a_A + a_B$ 。平面波展开法是计算声子

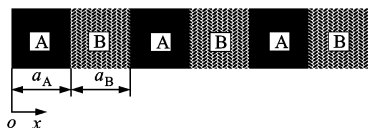
 a_A, a_B : A、B 2种材料的宽度

图2 一维杆状声子晶体结构示意图

晶体能带结构常用的方法,计算时考虑的是无限周期的理想结构,而当引入黏弹性时,特征值问题变得难以求解,因此本文采用迭代算法来计算。

一维杆状声子晶体结构中的弹性波满足如下波动方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(E(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) = \rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (5)$$

式中: $\rho(x)$ 、 $E(x)$ 分别为材料密度和弹性模量; $u(x, t)$ 为截面沿 x 方向的位移。对于结构中的谐波,根据 Bloch 定理,式(4)解的形式可以写为

$$u(x, t) = u_k(x) e^{(kx - \omega t)} \quad (6)$$

式中: k 为波矢。由于结构的周期性,波幅 $u_k(x)$ 与材料参数 $\rho(x)$ 、 $E(x)$ (对于黏弹性材料, $E(x)$ 为复数并为频率的函数,应写作 $E^*(x, \omega)$) 具有相同的空间周期性,可以同时按傅里叶级数形式展开后代入式(5),经整理求解可得考虑材料黏弹性的一维杆状声子晶体特征频率的无限阶方程^[15-16, 20]

$$\omega^2 \sum_{G_0} \rho_{G'-G_0} u_{k+G_0} = \sum_{G_0} E_{G'-G_0}^*(\omega) (k + G_0) (k + G') u_{k+G_0} \quad (7)$$

式中: ω 为圆频率; G_0 、 G' 为倒格矢,在整个倒空间取值。为了求得方程的数值解, G_0 、 G' 通常在有限倒空间取值,式(7)即变为有限阶方程。给定 k 可以求得一系列特征频率值;让 k 在倒空间取遍第一布里渊区 $(-\pi/a, \pi/a)$,即可求得一维杆状声子晶体的能带结构。

对于一般弹性材料组成的声子晶体结构,弹性模量不随频率变化,式(7)即退化为一般的特征值问题。在 Matlab 中只需要构建特征矩阵,利用 eig 函数就可以求得方程的特征值。当引入材料黏弹性后,弹性模量变为复数并且是频率的函数,此时在 Matlab 中方程的数值解不能简单用上述函数来求取,而只能通过迭代算法来求取。在求解给定 k 下的某一阶特征频率时,先设定一个参考频率 ω_r ,根据黏弹性材料模型计算出复模量 $E^*(\omega_r)$,然后按照上述方法求解出特征频率。将特征频率与参考频率 ω_r 进行对比,当它们之间的差值小于设定容差即可;否则,更新参考频率并继续迭代。这样迭代下去,对应每一个给定的 k 就可以得到一系列的特征频率,从而可以绘制以波矢(一般除以 π/a ,使其在 $0 \sim 1$ 之间变化)为横坐标、频率为纵坐标的能带结构图。

3 复模量对能带结构频移的影响

对于由一般完全弹性材料组成的声子晶体,弹

性模量都视为常数,不同组元之间的密度和弹性模量相差得越大就越容易产生带隙。对于含有黏弹性材料的声子晶体结构,弹性模量不仅为复数,而且随频率变化。在研究材料黏弹性对声子晶体能带结构的影响时,文献[15-19]都忽略了损耗模量的影响,只考虑了储能模量的影响,而文献[20-22]则指出,损耗模量对能带结构具有重要影响。

对由金属材料(不考虑黏弹性)和黏弹性橡胶交替排列组成的一维声子晶体杆结构的能带结构进行了计算,通过对比分别分析了储能模量和损耗模量对能带结构的影响。在计算中,取晶格常数 a 为 0.1 m ,组元宽度比例为 $1:1$ 。金属材料的密度 ρ_A 为 $7\,890\text{ kg/m}^3$,弹性模量 E_A 为 196 GPa 。黏弹性材料的密度 ρ_B 为 $1\,300\text{ kg/m}^3$,模量参数 E_1 为 60 MPa , E_2 为 2 MPa 。图 3 绘出了不同松弛时间时黏弹性材料的复模量随频率变化的曲线。从图中可知,松弛时间决定阻尼峰的中心频率。为了探讨损耗模量对声子晶体能带结构的影响,当 $\tau=10^{-4}\text{ s}$ 时,对以下 3 种情况的能带结构进行了对比:①弹性模量为实常数(在所计算的频率范围求取的平均值 $E_C=30\text{ MPa}$)的情况;②储能模量按图 1b 所示随频率变化,而忽略损耗模量影响的情况;③储能模量和损耗模量都随频率变化的实际情况。前 3 阶能带结构的对比结果如图 4 所示。

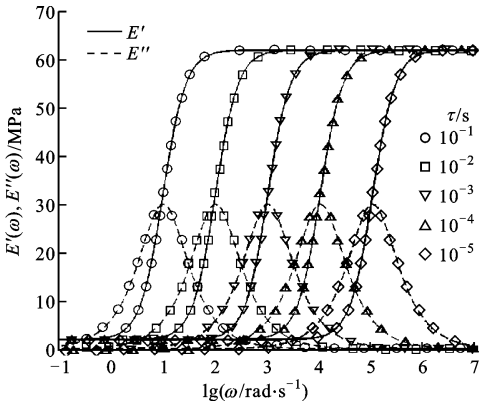


图 3 不同松弛时间下复模量随频率的变化曲线

从图 4 中可以看出,弹性模量为复数时所得到的声子晶体能带结构与弹性模量视为常数的情况相差很大,各阶能带之间形成的带隙也增宽了很多。考虑材料的黏弹性,第 1 带隙(即第 1、2 能带之间的间隙)明显向低频扩宽。特别是对于第 2 带隙,弹性模量为复数时比视为常数时宽了将近 1 倍。对比只考虑储能模量和同时考虑储能模量和损耗模量的情况,发现:两者的第 1、3 阶能带基本上重合,而第 2

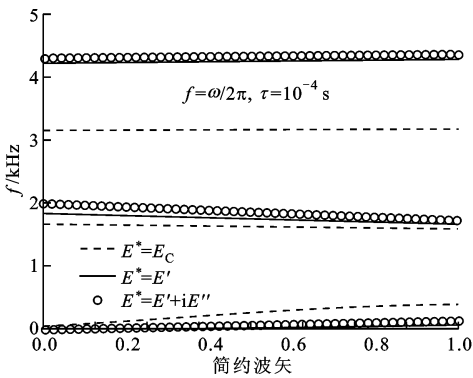


图 4 复模量对声子晶体能带结构的影响曲线

阶能带变化较大;考虑复模量的情况下第 2 阶能带被推向更高的频率范围,从而使第 1 带隙的宽度增大。这说明,材料的黏弹阻尼对声子晶体能带结构具有重要的影响,弹性模量越大,能带的频率也越高。由于储能模量随频率呈现增大的趋势,在低频时比平均值要小,使得第 1 阶能带的频率比弹性模量为常数时低,而在高频时储能模量比其平均值要大,从而使得第 2、3 阶能带比弹性模量为常数时的高。对于损耗模量,由于它只在阻尼峰附近存在较大的值,因此只对这一频率范围内的能带产生较大的影响。

为了深入分析损耗模量对声子晶体能带结构的影响,在黏弹性材料的松弛时间分别为 10^{-1} 、 10^{-2} 、 10^{-3} 、 10^{-4} 和 10^{-5} s 时,计算并对比了考虑损耗模量和不考虑损耗模量时声子晶体的能带结构,对比结果如图 5 所示。

当 τ 不小于 10^{-2} s 时,从图 3 可知,黏弹性材料的阻尼峰位于 20 Hz 以下,在 $20\text{ Hz}\sim 5\text{ kHz}$ 范围内损耗模量减小为 0,而储能模量几乎保持为常数。因此,在图 5a 中, $\tau=10^{-1}\text{ s}$ 和 $\tau=10^{-2}\text{ s}$ 时是否考虑损耗模量对能带结构及其带隙特性并无影响。当松弛时间 τ 减小为 10^{-3} s 时,阻尼峰位于 167 Hz 左右,储能模量也在这一频率附近剧增,从而使位于这一频率附近的能带发生弯曲,而且考虑损耗模量与不考虑损耗模量所得的能带有一定的偏移。当 $\tau=10^{-4}\text{ s}$ 时,阻尼峰位于 $1\,667\text{ Hz}$ 左右,因此损耗模量对位于 $1\,750\text{ Hz}$ 左右的第 2 阶能带存在较大的影响,而对于其他阶次的能带影响较小。值得注意的是,此时位于阻尼峰下方的第 1 阶能带的频率相比于前 3 种情况降低了很多,这是由于所处频率范围的储能模量接近最小值的缘故。当 $\tau=10^{-5}\text{ s}$ 时,阻尼峰位于 10 kHz 以上。从图 3 可以看到,储能模量和损耗模量在 5 kHz 以下范围内的值都很小,储

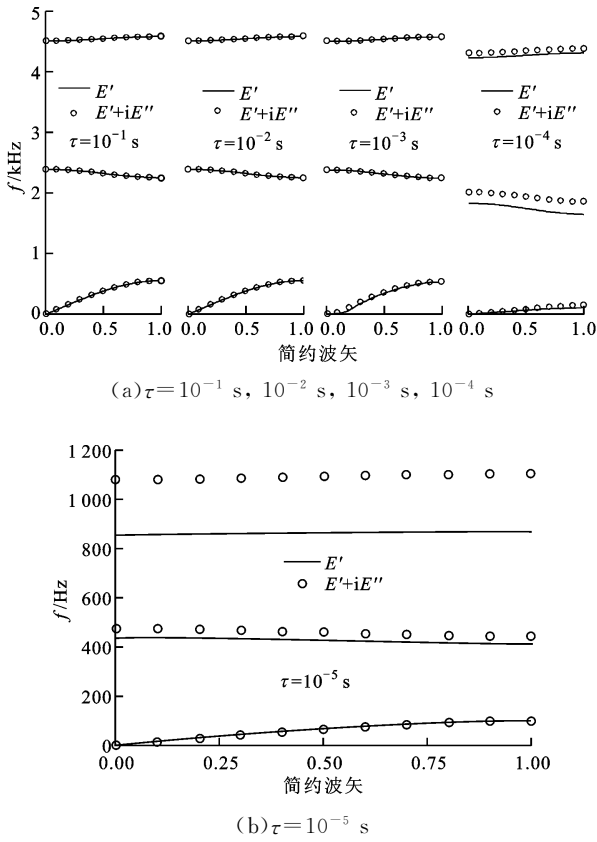


图 5 不同松弛时间下损耗模量对声子晶体能带结构的影响

能模量位于最小值附近,而损耗模量接近于 0,这使得声子晶体的各阶能带频率都有很大降低(如图 5b 所示)。由于储能模量和损耗模量在 1 200 Hz 以下范围都随频率缓慢增大,而且损耗模量的增速更快,因此,损耗模量的影响随着能带阶次的升高变大,带隙的宽度也增大得更多。

为了进一步明确材料黏弹性对位于其阻尼峰附近能带的调节作用和机理,对图 5a 中 $\tau=10^{-3} \text{ s}$ 时连续跨过了黏弹性材料阻尼峰的第 1 能带进行了研究,并计算了相应的相速度 v_p 和群速度 v_g 的色散关系,结果如图 6 所示。弹性纵波在弹性细长杆中传播时,其速度(即相速度)由材料的密度和弹性模量决定,即 $v_p=(E^*/\rho)^{1/2}$ 。同时,相速度决定了能带的斜率,即 $v_p=\omega/k$ 。群速度表示弹性波能量的传播速度,其值等于能带上某点的切线斜率。图 6 中分别对比了弹性模量为实常数(E_C)、只考虑储能模量(E')和同时考虑储能模量及损耗模量($E'+iE''$)时的色散关系。

对于弹性模量为实常数的情况,在低频范围由于波长较大,弹性波在周期结构中传播与在均匀介质中无异,色散关系近似呈线性,如图 6a 中虚线所

示,相应的相速度和群速度也基本保持不变,如图 6b 中的实心和空心三角曲线所示。由于黏弹性的引入,储能模量和损耗模量都在阻尼峰附近发生急剧的变化,使得结构的色散关系呈非线性。由于声子晶体的 2 种组元的密度和弹性模量相差很大,弹性波在其中传播时,金属层的位移远小于黏弹性橡胶的位移。声子晶体可以等效为由如图 1a 所示模型连接质量块组成的一维弹簧-质量-阻尼系统。在极低频,声子晶体相当于由弹簧(E_2)连接质量块组成的完全弹性系统,其色散关系也呈线性,只不过此时相速度和群速度很小,如图 6a、6b 中 20 Hz 以下部分所示。当频率接近阻尼峰频率(167 Hz)时,一方面,储能模量的增大使得弹性波在结构中的传播速度和能量的传播速度也增大,如图 6b 中 20~300 Hz 范围实心、中空圆组成的色散关系曲线所示,能带也随之向高频偏移,如图 6a 中 20~300 Hz 范围的实线所示。另一方面,损耗模量的增大也使得系统的等效弹性模量增大,导致弹性波在结构中的传播速度增大,能带继续向高频偏移,但同时由于黏性元件的黏滞力作用,一部分能量不断地耗散在

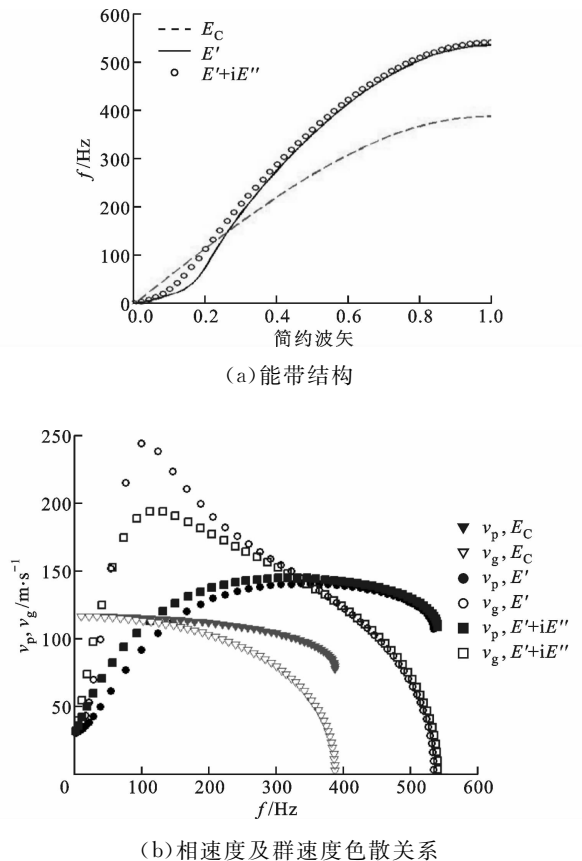


图 6 对应于声子晶体能带结构的相速度及群速度色散关系

结构中不能向前传播,能量的传播速度略有降低,如图6b中圆形和方形符号表示的群速度色散关系曲线所示。色散关系曲线在阻尼峰附近的频率范围内变化最大。当频率高于阻尼峰时,系统又近似为完全弹性系统,弹性波在结构中的传播速度趋于最大值,而且损耗模量对色散关系的影响逐渐消失,如图6中300~350 Hz范围内的曲线所示。对于350 Hz以上部分,由于内部周期结构对波的多重散射作用,加上前向波与返回波的相互作用,形成了如图6b所示的色散关系,并在布里渊区边界形成弹性波带隙。能带向低频弯曲,相速度略有降低,而群速度在带隙边界上减小为0,表明此时能量无法向前传播,即表示带隙产生。

4 结 论

本文根据黏弹性材料的标准线性固体模型,利用平面波展开法的迭代算法对由黏弹性材料组成的一维声子晶体的能带结构及带隙特性进行了计算和理论分析。由于材料黏性的频率相关性,储能模量和损耗模量都是频率的函数,从而对声子晶体的能带结构产生了重大影响。对比结果表明,损耗模量对能带结构的影响与频率有关,在阻尼峰值附近的频率范围内,损耗模量的影响最大,是不容忽视的,位于此频率范围的能带被调向更高频。在其他频率范围,损耗模量的影响较小,能带位置基本保持不变,此时才可以只考虑储能模量的影响^[15-19]。调节阻尼峰的频率值使其接近声子晶体的某一能带,就能够通过损耗模量来调节任一能带,从而使此能带下方的带隙变宽,上方的带隙变窄。材料黏弹性对声子晶体能带结构的这些影响归因于材料黏弹阻尼的频率相关性。本文的研究结果可以为黏弹性阻尼材料应用于声子晶体提供一定的理论基础,也为调节声子晶体能带结构和获得宽频带隙提供了一种新的方法。

参考文献:

- [1] 温熙森,温激鸿,郁殿龙,等. 声子晶体 [M]. 北京:国防工业出版社,2009:2.
- [2] SIGALAS M, ECONOMOU E N. Elastic and acoustic wave band structure [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, 158(2): 377-382.
- [3] SIGALAS M, ECONOMOU E N. Band structure of elastic waves in two-dimensional systems [J]. *Solid State Commun*, 1993, 86(3): 141-143.
- [4] KUSHWAHA M S, HALEVI P, DOBRZYNSKI L, et al. Acoustic band structure of periodic elastic composites [J]. *Physical Review Letters*, 1993, 71(13): 2022-2025.
- [5] MARTINEZ-SALA R, SANCHEZ J V, et al. Sound attenuation by sculpture [J]. *Nature*, 1995, 378: 241.
- [6] ZHU Xuefeng, LIU Shengchun, XU Tao, et al. Investigation of a silicon-based one-dimensional phononic crystal plate via the super-cell plane wave expansion method [J]. *Chinese Physics: B*, 2010, 19(4): 044301.
- [7] TANAKA Y, TOMOYASU Y, TAMURA S. Band structure of acoustic waves in phononic lattices: two-dimensional composites with large acoustic mismatch [J]. *Physical Review: B*, 2000, 62(11): 7387-7392.
- [8] LIU Zhengyou, CHAN C T, SHENG Ping, et al. Elastic wave scattering by periodic structures of spherical objects: theory and experiment [J]. *Physical Review: B*, 2000, 62(4): 2446-2457.
- [9] SPRIK R, WEGDAM G H. Acoustic band gaps in composites of solids and viscous liquids [J]. *Solid State Commun*, 1998, 106(2): 77-81.
- [10] ZHANG Xin, LIU Zhengyou, MEI Jun, et al. Acoustic band gaps for a two-dimensional periodic array of solid cylinders in viscous liquid [J]. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2003, 15: 8207-8212.
- [11] 周光泉,刘孝敏. 黏弹性理论 [M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,1996:5.
- [12] PSAROBAS I E. Viscoelastic response of sonic band-gap materials [J]. *Physical Review: B*, 2001, 64(1): 012303.
- [13] HUSSEIN M I. Theory of damped Bloch waves in elastic media [J]. *Physical Review: B*, 2009, 80(21): 212301.
- [14] HUSSEIN M I, FRAZIER M J. Band structure of phononic crystals with general damping [J]. *Journal of Applied Physics*, 2010, 108(9): 093506.
- [15] 王刚,温激鸿,刘耀宗,等. 一维黏弹材料周期结构的振动带隙研究 [J]. *机械工程学报*, 2004, 40(7): 47-50.
- [16] WANG Gang, WEN Jihong, LIU Yaozong, et al. Research on the vibration band gaps of one dimensional viscoelastic periodic structure [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2004, 40(4): 47-50.
- [17] 温激鸿,王刚,刘耀宗,等. 金属/丁腈橡胶杆状结构声子晶体振动带隙研究 [J]. *振动工程学报*, 2005, 18(1): 1-7.

(下转第48页)